Barem de corectare OLM 2019 Clasa a IX-a

P1 – autor Petru Braica (GM9/2018)

Soluția 1.(Metoda inducției matematice) Verificare pentru $n=1$	1p
Presupunem propoziția adevărată pentru un număr $n\geq 1$. Rezultă: $2^{2n-1}=(-2)^{n-1}+1+9k, k\in Z$	1p
$P(n+1): 2^{2n+1}-(-2)^n-1 \vdots 9$	1p
$A=2^{2n+1}-(-2)^n-1=4\cdot 2^{2n-1}-(-2)^n-1=4\left[9k+(-2)^{n-1}+1\right]-(-2)^n-1=$	1p
$=36k+3\left[1-(-2)^n\right]$	1p
$1-(-2)^n \vdots 3$ (pentru că $a^n-b^n \vdots (a-b)$, dacă a, b numere întregi, $n\in N$) și astfel $A \vdots 9$	2p
Soluția 2. $A=2^{2n-1}-(-2)^{n-1}-1$; arătăm că $2A \vdots 9$, de unde va rezulta că $A \vdots 9$	2p
$2A=2^{2n}+(-2)^n-2=(-2)^{2n}+(-2)^n-2=$	2p
$=\left[(-2)^n-1\right]\left[(-2)^n+2\right]=\left[(-2)^n-1\right]\left[(-2)^n-1+3\right]$	2p
$a^n-b^n \vdots (a-b)$, dacă a, b numere întregi, $n\in N$, deci $(-2)^n-1 \vdots 3$, de unde $2A \vdots 9$	1p

P2

$a_1=b_1$, $a_2=b_2$ implică $a_1+r=a_1q \Leftrightarrow r=a_1(q-1)$	1p
$P(n): a_n\leq b_n$. $P(1), P(2)$ adevărate conform ipotezei. Pentru $n\geq 2$ presupunem $P(n)$ adevărată	1p
$P(n+1): a_{n+1}\leq b_{n+1} \Leftrightarrow a_n+r\leq b_nq$. Este suficient să arătăm că $b_n+r\leq b_nq \Leftrightarrow$	2p
$\Leftrightarrow b_n+a_1(q-1)\leq b_nq \Leftrightarrow b_1(q-1)\leq b_n(q-1)$	1p
Inegalitate adevărată pentru că, dacă $q\geq 1$ avem $b_n\geq b_1$, iar dacă $q\in(0,1)$ avem $b_n<b_1$	2p

P3 – autor Alin Pop

Avem $\sqrt{ab}=n\in N$ și $n\leq \frac{a+b}{2}<n+1$	1p
Caz 1. a, b de aceeași paritate; atunci $\frac{a+b}{2}\in N$, de unde $\frac{a+b}{2}=n$	1p
Rezultă $b=2n-a$ și $(a-n)^2=0$, de unde $a=b=n$ și mulțimea soluțiilor $S=\{(n,n) \mid n\in N\}$	1p
Caz 2. a, b de parități diferite; presupunem $a\leq b$. Avem $a+b$ impar și $n\leq \frac{a+b}{2}<n+1$	1p
$\frac{a+b}{2}=n+\frac{1}{2}$, de unde $b=2n-a+1$, $a(2n-a+1)=n^2 \Leftrightarrow (n-a)^2=a$	1p
Rezultă $a=k^2, k\in N$, $n-k^2=k$, de unde $n=k^2+k$ și $b=(k+1)^2$	1p
Mulțimea soluțiilor $S=\left\{\left(k^2,(k+1)^2\right) \mid k\in N\right\}\cup\left\{\left((k+1)^2,k^2\right) \mid k\in N\right\}$	1p

P4

a) $\overrightarrow{O_1O_2}=\overrightarrow{O_1A}+\overrightarrow{AO_2}=$	1p
$=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=$	1p
$=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}\right)$	1p
b) Din punctul precedent rezultă $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{O_1O_2}$	1p
$2\overrightarrow{O_1O_2}=3\overrightarrow{O_1O_2}$, de unde $\overrightarrow{O_1O_2}=\vec{0}$	1p
Rezultă $O_1=O_2$, deci diagonalele se înjumătățesc, adică patrulaterul este paralelogram.	1p